Απειροστικός Λογισμός ΙΙ - Ιούνιος 2018: Θέματα και Υποδείξεις

1. Να βρεθούν το πολυώνυμο και το υπόλοιπο Taylor τάξης $2n$ της συνάρτησης $f(x) = cos2x, x \in \mathbb{R}$ στο σημείο $x_0 = 0$ και αποδειχθεί ότι η f αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά γύρω από το x_0.
Υπόδειξη. Είναι $cos'(2x) = -2sin(2x), cos''(2x) = -2^2cos(2x), cos'''(2x) = 2^3sin(2x), cos^{(4)}(2x) = 2^4cos(2x)$ και, επαγωγικά, $cos^{(2n+1)}(0) = 0$ και $(cos2x)^{(2n)} = (-1)^n 2^{2n} cos(2x)$. Επομένως $T_{2n}(cosx; 0) = 1 - 2^2\frac{x^2}{2!} + 2^4\frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n 2^{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ και $R_{2n} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}2^{2n+1}(-1)^n sin(2\xi)$. Είναι $|R_{2n}| = \left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}2^{2n+1}(-1)^n sin(2\xi)\right| \leq \frac{|x^{2n+1}|}{(2n+1)!}2^{2n+1} := b_n$ με $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4x^2}{(2n+2)(2n+3)} \to 0, \forall x \in \mathbb{R}$, άρα και $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n} = 0, x \in \mathbb{R}$.

2. i) Αν $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες τότε $\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leq \left[\int_a^b g^2(x)dx\right]\left[\int_a^b f^2(x)dx\right]$.
Υπόδειξη. Είναι $\int_a^b [\lambda f(x) + g(x)]^2 dx \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Επομένως η διακρίνουσα του τριωνύμου ως προς λ είναι μη θετική.

ii) Για $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 |f(x)|dx \leq \sqrt{\left[\int_0^1 f^2(x)dx\right]}$.
Υπόδειξη. Εφαρμογή του i) για $a = 0, b = 1, g(x) = 1, |f|$.

3. Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ είναι μια συνεχής συνάρτηση με $\int_a^b f(x)dx = 0$, να αποδειχθεί ότι $f(x) = 0, x \in [a, b]$. Ισχύει το συμπέρασμα αν η συνέχεια αντικατασταθεί με ολοκληρωσιμότητα;
Υπόδειξη. Αν όχι, τότε υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ με $f(x_0) > 0$. Από την συνέχεια της f στο c έπεται (...) ότι υπάρχει διάστημα $[c, d] \subseteq [a, b]$ με $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}, x \in [c, d]$, επομένως $\int_a^b f(x)dx \geq ... \geq \int_c^d f(x)dx > (d - c)\frac{f(x_0)}{2} > 0$, άτοπο. Όχι, για την συνάρτηση f με $f(x) = 0, x \in (0, 1], f(0) = 1$ είναι $\int_a^b f(x)dx = 0$ (;) αλλά $f(0) = 1 \neq 0$.

4. Να αποδειχθεί η σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ και να εξετασθεί η σύγκλιση των $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nlnn}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-3n+1}{5n^3\sqrt{n}+2n^2-n-3}$.
Υπόδειξη. Είναι $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, n > 1$, και $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) < \infty$.
Η $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nlnn}$ αποκλίνει (Θ. συμπύκνωσης). Είναι $\frac{4n^2-3n+1}{5n^3\sqrt{n}+2n^2-n-3} \leq \frac{4n^2}{5n^3\sqrt{n}+2n^2-n-3} < \frac{4n^2}{5n^3\sqrt{n}}, n > 4$ και η σειρά $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{n^2}{n^3\sqrt{n}} >$ είναι αρμονική με $p = 3/2 > 1$. Άλλος τρόπος: σύγκριση με την αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$).

5. Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, συγκλίνει αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|a_{n+1} + ... + a_{n+k}| < \epsilon, \quad \forall n > n_\epsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Υπόδειξη.Θεωρία.
Με χρήση της παραπάνω πρότασης ή με άλλο τρόπο να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, αποκλίνει.
Υπόδειξη. Με χρήση της πρότασης για $k = 2n + 1$ και $\epsilon = \frac{1}{3}$ καταλήγουμε σε άτοπο.
Άλλος τρόπος: Με χρήση του ολοκληρωτικού κριτηρίου για την $f(x) = \frac{1}{x}$ επειδή $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \infty$.

6. Να αποδειχθεί ότι αν $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση και (a_n) είναι μια βασική ακολουθία με $a_n \in I$ τότε η ακολουθία $f(a_n)$ είναι επίσης βασική ακολουθία. **Θεωρία.**

7. Να εξετασθεί ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x \geq 0$ στα διαστήματα $I_1 := [0, 1)$ και $I_2 := [1, \infty)$. Είναι η f ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, \infty)$;
Υπόδειξη. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 1]$ (ως συνεχής σε κλειστό διάστημα) άρα και στο $I_1 = [0, 1)$. Η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $I_2 := [1, \infty)$ με $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}, x \in I_2$, άρα (..) ομοιόμορφα συνεχής στο I_2. Για την ομοιόμορφη συνέχεια της f στο $[0, \infty)$ αρκεί να ληφθεί $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ με δ_1, δ_2 όπως προκύπτουν από τους ορισμούς της ομοιόμορφης συνέχειας στα I_1, I_2.

8. Για την φραγμένη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ να δοθούν αναλυτικοί ορισμοί των: α) διαμέρισης P του $[a,b]$, β) $L(f;P), U(f;P)$, γ) $\underline{\int_a^b} f(x)dx, \overline{\int_a^b} f(x)dx$, δ) $\int_a^b f(x)dx$, και να αποδειχθεί ότι αν m είναι ένα κάτω φράγμα και M είναι ένα άνω φράγμα της f στο $[a,b]$ τότε για οποιαδήποτε διαμέριση του $[a,b]$ είναι

$$m(b-a)\le L(f;P)\le U(f;P)\le M(b-a).$$

Υπόδειξη. Θεωρία.

9. Να υπολογισθούν δύο από τα ολοκληρώματα

$$(i)\int\frac{2x-3}{x^2+5x+6}dx,\quad (ii)\int e^{2x+1}cos(3x)dx,\quad (iii)\int\sqrt{12-4x-x^2}dx.$$

Υπόδειξη. i) Ανάλυση σε κλάσματα $\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}$. ii) Παραγοντική ολοκλήρωση (δύο φορές) iii) Είναι $\sqrt{12-4x-x^2}=\sqrt{16-(x+2)^2}$, θέτουμε $x+2=4sint$ (ή $x+2=u, z=4sinu$), είναι $2cos^2x=1+cos(2x)$ κ.λ.π..

10. Να εξετασθούν ως προς την σύγκλιση τρία από τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$(i)\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx,\quad (ii)\int_{-\infty}^{-1}\frac{e^{-x}}{x}dx,\quad (iii)\int_0^{\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}dx,\quad (iv)\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+3x}}.$$

Υπόδειξη. i) Είναι $\lim\limits_{b\to1}\int_0^b\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx=\lim\limits_{b\to1}2[1-\sqrt{1-b}]=2$, ii) Είναι για $=u=-x$

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{e^{-x}}{x}dx=\lim_{b\to-\infty}\int_b^{-1}\frac{e^{-x}}{x}dx=\lim_{b\to-\infty}\int_{-b}^{1}\frac{e^u}{-u}(-du)=-\lim_{b\to-\infty}\int_1^{-b}\frac{e^u}{u}(du)=-\lim_{c\to+\infty}\int_1^{c}\frac{e^u}{u}du.$$

Έχουμε $\frac{e^u}{u}\ge\frac{1}{u}, u\ge1$ και $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b e^u du=\infty$.

iii) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ άρα υπάρχει $x_0>0$ με $\frac{x^2}{e^x}<1, x\ge x_0$. Επειδή η $\frac{x^2}{e^{2x}}$ είναι συνεχής, είναι $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}dx=\int_0^{x_0}\frac{x^2}{e^{2x}}dx+\int_{x_0}^{\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}dx\le\int_0^{x_0}\frac{x^2}{e^{2x}}dx+\int_{x_0}^{\infty}\frac{1}{e^x}dx<+\infty$.

(Άλλος τρόπος: σύγκριση με $1/e^x$.)

iii) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+3x}}\ge\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{4x^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{2/3}}=+\infty$.

11. Να βρεθούν οι τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες συγκλίνουν οι δυναμοσειρές

$$(i)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n},\quad (ii)\sum_{n=1}^{\infty}n(2x-1)^n,\quad (iii)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+1}.$$

Υπόδειξη. i) Είναι $x_0=3, a_n=\frac{1}{n}$ και $lim\sqrt[n]{n}=1$ άρα $R=1$, επομένως η σειρά συγκλίνει στο $(2,4)$. Για $x=2$ έχουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ η οποία συγκλίνει (;;) ενώ για $x=4$ έχουμε ότι την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ που απειρίζεται θετικά. Επομένως η σειρά συγκλίνει στο $[2,4)$.

ii) Είναι $n(2x-1)^n=n2^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$ άρα $x_0=0, a_n=n2^n$, $lim\sqrt[n]{n2^n}=2$ και $R=1/2$, επομένως η σειρά συγκλίνει στο $(0,1)$. Στα $0,1$ η δυναμοσειρά αποκλίνει.

iii) Είναι $x_0=0, a_n=\frac{1}{n^2+1}$ και $lim\sqrt[n]{\frac{1}{n^2+1}}=1$ άρα $R=1$ κ.λ.π.. Βρίσκουμε ότι η σειρά συγκλίνει στο $[-1,1]$.